OSCILLATEURS HARMONIQUES

On s'intéresse à l'étude d'oscillateurs mécaniques à un degré de liberté (caractérisé par une seule variable spatiale : x, θ ...) dans un référentiel galiléen.

I. OSCILLATEUR HARMONIQUE NON AMORTI

1) Définition de l'oscillateur harmonique non amorti - Exemples

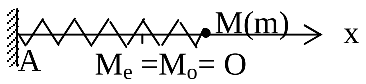
- ***Définition***

Un oscillateur harmonique non amorti à un degré de liberté est un système pour lequel la variable x vérifie **l'équation différentielle linéaire** du second ordre à coefficients constants $\boxed{\ddot{x}+\omega_0^2 x=0}$ où ω_o **est la pulsation propre de l'oscillateur**, homogène à l'inverse d'un temps (en rad.s^{-1} dans le S.I.).

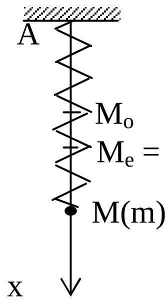
EXEMPLES :

- ***Particule M de masse m élastiquement liée (attachée à un ressort de raideur k)*** - *voir TD Dynamique (exo1) et TD Etude énergétique (exo5)*

1) Cas d'un mouvement horizontal

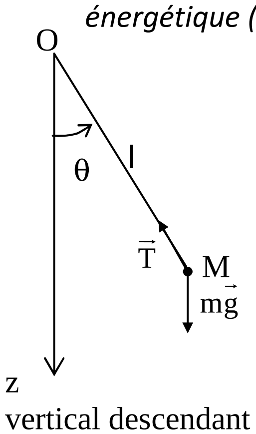


2) Cas d'un mouvement vertical



Dans les deux cas, nous avons montré que la variable $x=\overline{M_eM}$ (déplacement algébrique de la particule M par rapport à sa position d'équilibre M_e) vérifie l'équation différentielle : $\ddot{x}+\omega_0^2 x=0$ avec $\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}}$

- ***Le pendule simple (dans le cas de petites oscillations)*** - *voir TD Dynamique (exo2) et TD Etude énergétique (exo5)*



Nous avons montré que la variable θ vérifie l'équation différentielle non linéaire $\ddot{\theta}+\omega_0^2\sin\theta=0$ avec $\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}}$ (Oscillateur non harmonique)

Au voisinage de la position d'équilibre θ = 0, c'est à dire pour de petites oscillations $(\sin\theta \sim \theta)$, l'équation différentielle devient linéaire : $\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta=0$ (oscillateur harmonique)

2) Réponse de l'oscillateur harmonique non amorti

RAPPEL : *Voir TD dynamique*

La réponse x(t) est la solution de l'équation différentielle $\ddot{x}+\omega_0^2 x=0$ $\begin{cases} \text{- }a\text{ - } x=x_1.\cos(\omega_o.t)+x_2.\sin(\omega_o.t) \\ \text{- }b\text{ - } x=X_m.\cos(\omega_o.t+\varphi) \end{cases}$

M effectue des oscillations sinusoïdales autour de sa position d'équilibre x = 0 de pulsation ω_o, de période $T_o = \frac{2\pi}{\omega_o}$ et d'amplitude X_m ($X_m > 0$).

Les constantes d'intégration (x_1, x_2) ou (X_m, φ) sont déterminées par les conditions initiales :

$$t=0 \qquad x(0)=x_o \begin{cases} x_1 = x_o \\ X_m.\cos(\varphi)=x_o \end{cases} \qquad \dot{x}(t)=\begin{cases} \omega_o\left(-x_1.\sin(\omega_o t)+x_2\cos(\omega_o t)\right) \\ -\omega_o.X_m.\sin(\omega_o t+\varphi) \end{cases} \qquad \dot{x}(0)=v_o \begin{cases} \omega_o.x_2 = v_o \\ -\omega_o.X_m.\sin(\varphi)=v_o \end{cases}$$

Soit $x_1 = x_o$ et $x_2 = \frac{v_o}{\omega_o}$ ou $X_m = \sqrt{x_o^2 + \frac{v_o^2}{\omega_o^2}}$ et $\tan(\varphi) = -\frac{v_o}{x_o.\omega_o}$

3) Etude énergétique

Exemple dans le cas de la particule élastiquement liée (se généralise à un cas quelconque).

- ***Energie potentielle***

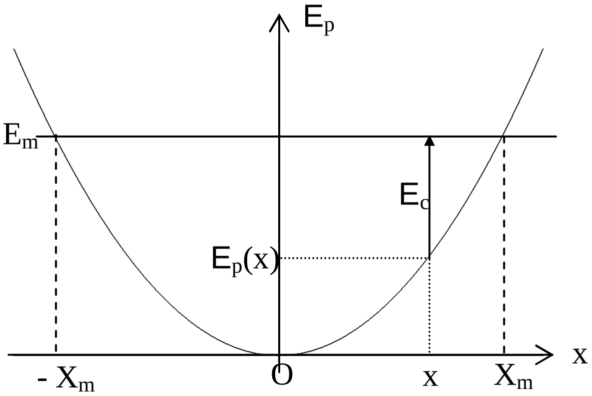
La force $\vec{F} = -k.x.\vec{e_x}$ dérive d'une énergie potentielle $\boxed{E_p(x) = \frac{1}{2}.k.x^2 + cste = \frac{1}{2}.k.x^2}$ (choix de la constante nulle).

- ***Energie mécanique***

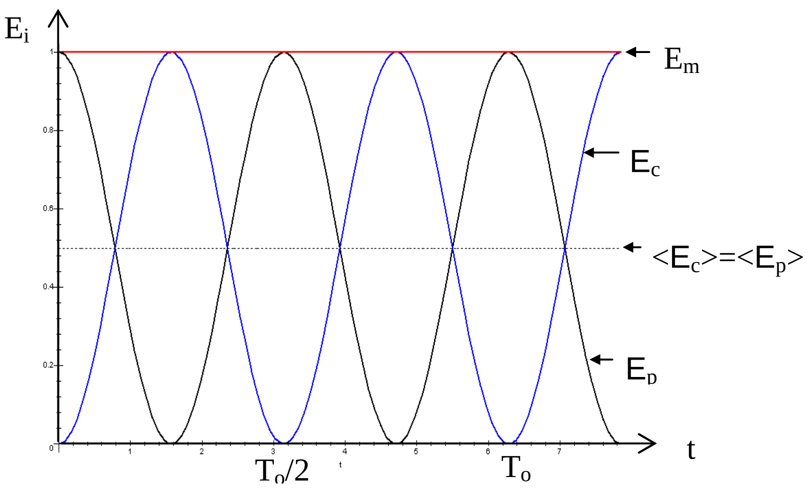
$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}.m.\dot{x}^2 + \frac{1}{2}.k.x^2 =$ cste du mouvement = $\frac{1}{2}.m.v_o^2 + \frac{1}{2}.k.x_o^2 \qquad \omega_o^2 = k/m$

$E_c = \frac{1}{2}.m.\omega_o^2.X_m^2.\sin^2(\omega_o.t+\varphi) = \frac{1}{2}.k.X_m^2.\sin^2(\omega_o.t+\varphi) \qquad E_p = \frac{1}{2}.k.X_m^2.\cos^2(\omega_o.t+\varphi)$

$$\text{Soit } E_m = \begin{cases} \frac{1}{2}.k.X_m^2 = E_{p\max} & \text{obtenu pour } v=0 \quad (E_c \text{ minimum}) \\ \frac{1}{2}.m.\omega_o^2.X_m^2 = E_{c\max} & \text{obtenu pour } E_p \text{ minimum (ici 0)} \end{cases}$$



Cuvette de potentiel parabolique.
On retrouve que x = 0 correspond à la position **d'équilibre stable.**



- ***Valeurs moyennes de** E_c **et** E_p **- Equipartition de l'énergie***

* Valeur moyenne d'une grandeur G(t) (sens temporel) : $\langle \mathbf{G} \rangle = \mathbf{lim}_{\tau\to\infty}\left\{\frac{\mathbf{1}}{\tau}\int_{t_o}^{t_o+\tau}\mathbf{G(t).dt}\right\}$

Si G(t) est périodique, de période T, on montre que $\langle \mathbf{G} \rangle = \langle \mathbf{G} \rangle_T = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n.T}}\int_0^{\mathbf{n.T}}\mathbf{G(t).dt} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}}\int_0^{\mathbf{T}}\mathbf{G(t).dt}$ (n entier)

*E_c et E_p sont périodiques de période $T_o/2$:

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2}.k.X_m{}^2.\langle \sin^2(\omega_o.t+\varphi)\rangle \qquad \text{et} \qquad \langle E_p \rangle = \frac{1}{2}.k.X_m{}^2.\langle \cos^2(\omega_o.t+\varphi)\rangle$$

$$\langle \cos^2(\omega_o t+\varphi)\rangle = \frac{1}{T_o}\int_0^{T_o}\cos^2(\omega_o t+\varphi).dt = \frac{1}{T_o}\int_0^{T_o}\frac{1}{2}(1+\cos(2\omega_o t+2\varphi)).dt = \frac{1}{2T_o}\left[t+\frac{1}{2\omega_o}\sin(2\omega_o t+2\varphi)\right]_0^{T_o} = \frac{1}{2}$$

De la même manière : $\langle \sin^2(\omega_o t+\varphi)\rangle = \langle \cos^2(\omega_o t+\varphi)\rangle = \frac{1}{2}$

Soit : $\langle E_c \rangle = \langle E_p \rangle = \frac{1}{4}.k.X_m{}^2 = \frac{1}{2}E_m$ Au cours du mouvement, il y a **équipartition de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.**

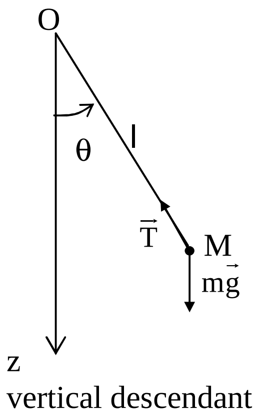
4) Intérêt de l'oscillateur harmonique non amorti

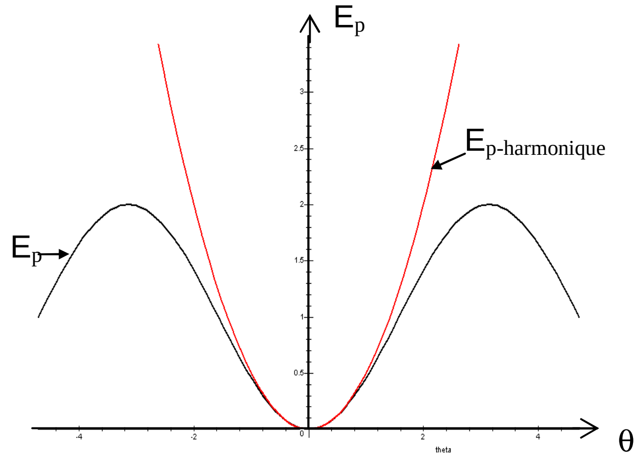
Au voisinage d'une position d'équilibre M_e (x_e), un développement limité de $E_p(x)$ conduit à :

$E_p(x) = E_p(x_e) + \frac{dE_p}{dx}(x_e).(x-x_e) + \frac{1}{2}\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_e).(x-x_e)^2 = E_p(x_e) + \frac{1}{2}\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_e).(x-x_e)^2 = \frac{1}{2}.k.X^2$ en faisant le choix $E_p(x_e) = 0$ et en posant $X = x - x_e$. **L'équilibre est stable si k > 0.**

Un système à un degré de liberté soumis à une force conservative, se comporte, quelle que soit sa nature, comme un **oscillateur harmonique au voisinage d'une position d'équilibre stable.**

Exemple : *le pendule simple - voir chapitre 3 Etude énergétique (V)*
L'énergie mécanique est une constante du mouvement.
L'énergie potentielle de pesanteur vérifie $E_p = -m.g.z + C = -m.g.l.\cos(\theta) + C = m.g.l.(1-\cos(\theta)) = E_p(\theta)$ (choix $E_p(0) = 0$).
La position d'équilibre stable est obtenue pour E_p minimum, soit pour $\theta = 0$.
Au voisinage de $\theta = 0$ $\cos(\theta) \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ (DL à l'ordre 2) soit $\boxed{E_p = \frac{1}{2}.m.g.l.\theta^2}$ **potentiel harmonique**





II. OSCILLATEUR HARMONIQUE AMORTI

1) Définition de l'oscillateur harmonique amorti - Exemples

Dans la partie I., on n'a pas tenu compte des forces de frottements (toujours présentes mais parfois négligeables).
On s'intéresse dans cette partie au cas d'une force de frottement fluide linéaire : $\boxed{\vec{f} = -\alpha\vec{v}}$ avec α constance positive.

EXEMPLES : Voir les exercices 1 et 2 du TD Oscillateurs harmoniques.

- ***Définition***

En généralisant les équations différentielles établies précédemment au cas d'un oscillateur harmonique amorti unidimensionnel (mouvement à un degré de liberté : point matériel repéré par un paramètre noté x - déplacement linéaire ou angulaire...) il vient $\boxed{\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ où **ω_o est la pulsation propre de l'oscillateur** et **λ représente le coefficient d'amortissement de l'oscillateur** (ces deux grandeurs caractéristiques de l'oscillateur sont homogènes à l'inverse d'un temps).

L'équation différentielle vérifiée par l'oscillateur harmonique amorti peut s'écrire aussi (autre forme canonique) **:** $\boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ où **Q correspond au facteur de qualité de l'oscillateur** (grandeur sans dimension). Comme λ il caractérise l'amortissement de l'oscillateur : $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$.

Remarque : Contrairement au coefficient d'amortissement λ, plus le facteur de qualité est grand est plus l'amortissement est faible (l'effet d'amortissement est inversement proportionnel à Q).

2) Réponse de l'oscillateur harmonique amorti

La forme de la réponse de l'oscillateur va dépendre du signe du discriminant de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \quad \text{ou} \quad r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0 \qquad \text{avec} \qquad \Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2) \quad \text{ou} \quad \Delta = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$$

Trois solutions sont alors envisageables :

- Si $\Delta > 0$, le régime est apériodique.
- Si $\Delta = 0$, le régime est critique.
- Si $\Delta < 0$, le régime est pseudo-périodique.

a) Régime apériodique

Condition : $\boxed{\Delta > 0 \quad => \quad \lambda > \omega_0 \quad \text{ou} \quad Q < \frac{1}{2}}$ **(amortissement élevé - facteur de qualité faible)**

Les racines de l'équation caractéristique sont réelles : $r_\pm = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ $(r_\pm < 0)$.

La solution est de la forme : $x(t) = Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t}$ soit $\boxed{x(t) = e^{-\lambda t}\left[Ae^{\left(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} + Be^{-\left(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t}\right]}$ **où A et B sont des constantes à déterminer à l'aide des conditions initiales.**

L'amplitude diminue au cours du temps sans que n'apparaissent d'oscillations.

b) Régime critique

Condition : $\boxed{\Delta = \mathbf{0} \quad => \quad \lambda = \boldsymbol{\omega_0} \ \text{ ou } \ \boldsymbol{Q} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}$ **(amortissement critique Q=$\boldsymbol{Q_c}$)**

L'équation caractéristique admet une racine double : $r = -\lambda = -\omega_0$.
La solution est de la forme : $\boxed{\boldsymbol{x(t) = e^{-\lambda t}[A + Bt]}}$ où A et B sont des constantes à déterminer à l'aide des conditions initiales.

L'amplitude diminue au cours du temps sans que n'apparaissent d'oscillations mais plus rapidement que pour le régime apériodique.

c) Régime pseudo-périodique

Condition : $\boxed{\Delta < 0 \quad => \quad \lambda < \boldsymbol{\omega_0} \ \text{ ou } \ \boldsymbol{Q} > \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}$ **(amortissement faible - facteur de qualité élevé)**

Les racines de l'équation caractéristique sont complexes : $r_\pm = \frac{-2\lambda \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2}$.
La solution est de la forme : $\boxed{\boldsymbol{x(t) = e^{-\lambda t}\left[A\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\right)t + B\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\right)t\right]}}$ ou $\boxed{\boldsymbol{x(t) = Ce^{-\lambda t}\cos\left[\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\right)t + \varphi\right]}}$ où (A,B) et (C,φ) sont des constantes à déterminer à l'aide des conditions initiales.

L'amplitude diminue au cours du temps en effectuant des oscillations de pseudo-période $\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\Omega}}$ avec $\boxed{\boldsymbol{\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}}$ pseudo-pulsation de l'oscillateur harmonique amorti.

L'amortissement est caractérisé par le **décrément logarithmique noté $\boldsymbol{\delta}$** et défini par : $x(t+T) = x(t)e^{-\delta}$ soit $\delta = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right) = \lambda T$.

Remarque : $\Omega < \omega_0$ donc $T_o = \frac{2\pi}{\omega_0}$ période propre de l'oscillateur est inférieure à T.
On retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique non amorti dans le cas où l'on néglige l'amortissement $(\lambda = 0)$: $\boldsymbol{x(t) = C.\cos[\omega_0 t + \varphi]}$.

3) Etude énergétique

On se place dans le cas d'un faible amortissement : $\boldsymbol{\lambda \ll \omega_0}$ ou $\boldsymbol{Q \gg 1}$.
Dans ce cas on peut écrire : $\Omega \approx \omega_0$ et $\delta = \lambda T \approx \lambda T_o = \lambda\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{Q} \ll 1$.
L'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique s'écrit : $\boxed{E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2}$
Cette énergie, constante dans le cas de l'oscillateur harmonique non amorti, décroit au cours du mouvement lorsqu'on prend en compte l'amortissement.
Démonstration : la force de frottement n'est pas conservative et s'oppose au mouvement donc sa puissance est négative : $P(\vec{f}) = \vec{f}.\vec{v} = -\alpha v^2 < 0$. D'après le théorème de la puissance mécanique : $\frac{dE_m}{dt} = P(\vec{f}) < 0$.